

2026 年数学建模校赛 B 题

洛克王国世界精灵捕捉与最优收益策略

一、问题背景

"洛克王国世界"是一款深受人们喜爱的游戏。在游戏中，玩家通过消耗游戏币（洛克贝）购买各种捕捉球来捕获野生精灵，随后可以去魔力之源回忆获取洛克贝。不同种类、不同成长阶段的精灵，其基础售价和抵抗捕捉的能力各不相同；同时，每只精灵在生成时会被随机赋予"天分""颜色外观"以及若干"奖牌"，这些随机属性会使实际售价成倍增长。此外，游戏内还存在一个名为"噩梦枷锁"的隐藏机制：当玩家反复捕捉同一个家族的精灵时，会累积隐藏的"污染值"，并触发特殊的"污染精灵"事件——击败污染精灵就有机会获得稀有的"异色"精灵，且每击败一定次数后还会触发保底，必定出现异色精灵。

玩家总是希望用有限的时间和洛克贝，通过合理选择捕捉对象、捕捉球种以及是否专注某一精灵家族来囤积保底进度，从而最大化自己的总资产。本题要求你建立数学模型，逐步分析并给出最优的捕捉策略。

二、基本数据

2.1 捕捉球的种类与效果

游戏中可以购买五种捕捉球，它们的价格、基础成功率以及特殊效果如表 1 所示。

球种	成本（洛克贝）	基准成功率	特殊效果
高级球	12 000	40%	无
属性球	3 000	30%	仅当精灵属性与球匹配时生效，否则无法捕捉
补光球	80 000	100%	百分百成功捕捉
国王球	160 000	100%	捕获的精灵天分必定为"了不起"
棱镜球	3 200 000	100%	捕获的精灵颜色外观必定为"炫彩"

表 1: 捕捉球数据

关于精灵球价格的补充：

当污染褪去出现异色精灵时小洛克一般会用棱镜球去捕捉，以求更高倍率。但棱镜球造价十分高昂，在游戏中小洛克可以通过活动和日常活动分光水晶，可以用来合成棱镜球，所以此时棱镜球可以降低一下价格从 3 200 000 降低为 1 600 000。

小洛克刷异色时一般会牵手抓宠物，这时属性球捕捉概率会提高与高级球同样为 40%，下文提到的收益规定为所有精灵收益之和的两倍，因为牵手捕捉两个人会共享收益，且对方不会有任何洛克贝的消耗。

在游戏中属性球一般需要小洛克去炼药台用普通球和相应的花合成，而且普通球需要用矿石合成，除了在远行商人那里购买和做任务获得的属性球、矿石、花以外，小洛克只能跑图去刷矿石和花。综合小洛克在现实中花的时间和各种因素考虑，属性球价格应适当提高至 12000，与高级球持平，后面可以认为高级球和属性球成本和捕抓成功率相同

关于成功率的说明：

使用高级球或属性球时，实际捕获概率 = 球基准成功率 × 目标精灵基础捕捉成功率。(1)

补光球、国王球、棱镜球的基准成功率为 100%，因此实际捕获概率恒为 100%，即只要使用就必定成功捕获。

属性球的属性必须与当前野生精灵的属性一致时才可使用，本题中我们假定玩家总是能用对属性，因此属性球始终可用且成功率为 30%。

国王球和棱镜球的特殊效果会覆盖原本随机生成的天分或颜色，但奖牌和其余随机项仍按原有规则生成。

2.2 精灵基础数据

游戏中可能出现多种野生精灵，其中部分精灵拥有多个成长阶段（形态），不同阶段的基础售价和基础捕捉成功率不同。同一精灵的不同形态视为同一家族，共享噩梦枷锁的污染计数与保底进度。各精灵的基础数据汇总于表 2。

家族	形态名称	基础洛克贝	基础捕捉成功率
恶魔狼	恶魔狼	6 000	75%
月牙雪熊	月牙雪熊	4 500	85%
犀角鸟	犀角鸟	2 400	90%
绒绒	绒绒	2 400	90%
粉星仔	粉星仔	2 400	90%
治愈兔	治愈兔（低阶）	1 800	95%

奇丽草	治愈兔（中阶）	3 150	90%
	治愈兔（高阶）	4 500	85%
	奇丽草（低阶）	1 800	95%
	奇丽草（中阶）	3 150	90%
	奇丽草（高阶）	4 500	85%
大耳帽兜	大耳帽兜（低阶）	1 800	95%
	大耳帽兜（中阶）	3 150	90%
	大耳帽兜（高阶）	4 500	85%
拉特	拉特（低阶）	1 800	95%
	拉特（高阶）	4 500	85%
呼呼猪	呼呼猪（低阶）	1 800	95%
	呼呼猪（高阶）	4 500	85%
格兰种子	格兰种子（低阶）	1 200	100%
	格兰种子（中阶）	2 100	95%
	格兰种子（高阶）	3 000	90%

表 2: 部分可异色精灵的基础数据

关于家族的补充说明：

当玩家选择捕捉某一形态时，即视为在对应家族的生态区域活动。同一家族不同形态的精灵共享污染累积和保底计数，但出现哪种形态由系统随机决定（本题中可假设各形态出现概率均等，具体分布不影响核心策略，参赛者可自行假设并说明）。

2.3 出售价格的影响因素

捕获精灵后，其出售价格由下式计算：

售价 = 基础洛克贝 × 天分倍率 × 颜色倍率 × 总奖牌倍率(1)

其中天分、颜色、奖牌为独立随机生成，具体规则如下。

天分倍率

每只精灵随机获得一个天分评价，倍率与概率见表 3。注意：若使用国王球捕获，则天分固定为"了不起"而不参与随机。

天分评价	倍率	出现概率
了不起	×5	2%
相当好	×3	8%
还不错	×2	30%
一般般	×1	60%

表 3: 天分倍率及出现概率

颜色倍率

颜色外观类型及倍率见表 4，各类型互斥。若使用棱镜球捕获，则颜色固定为"炫彩"而不参与随机。注意："噩梦污染"是普通捕捉过程中小概率出现的特殊外观，并非保底机制产出的异色。

外观类型	倍率	出现概率
异色	×10	1.8%
炫彩	×10	1.8%
异色 + 炫彩	×100	0.0324%
噩梦污染	×5	5%
普通外观	×1	91.3676%

表 4: 颜色外观倍率及出现概率

奖牌倍率

每只精灵独立携带 0-5 枚不重复类型的奖牌，奖牌类型从表 5 中按权重抽取。奖牌生成过程为：依次进行 5 次尝试，每次有 40% 的概率获得一枚尚未拥有的奖牌，达到 5 枚或尝试结束时停止。无奖牌时倍率为 1，有奖牌时总奖牌倍率为各奖牌倍率的乘积。奖牌不受国王球、棱镜球影响，始终随机。

奖牌类型	倍率	权重
完美无瑕	×3	5
粗嗓门	×3	5
婉转声	×3	5
小不点	×3	5
大块头	×3	5

王国颂歌	×2	10
青风之息	×2	10
晨光破晓	×2	3.75
灼日凌空	×2	3.75
暮色衔山	×2	3.75
星月交汇	×2	3.75

表 5: 奖牌种类、倍率与权重

2.4 异色保底机制（噩梦枷锁）

当玩家在一段时间内专注于捕捉同一家族的精灵时，会激活隐藏机制，具体规则如表 6 所示。

项目	规则
污染触发	同一家族每成功捕捉约 20 只精灵，地图上就会出现一只污染精灵。
挑战方式	玩家选择一种捕捉球攻击污染精灵，击破其护盾的概率 = 所选球的基础成功率（不受精灵基础成功率影响，国王球/棱镜球仍为 100%）。
击破收益	成功击破护盾（不论是否捕获该污染精灵），该家族的保底计数器加 1；同时，每次击破都有 1.8% 的概率直接获得一只异色精灵（该异色精灵自动进入背包，不消耗捕捉球）。
保底规则	同一家族的计数器累计达到 80 次时，第 80 次击破必定产出异色精灵，随后计数器清零。
重置条件	一旦玩家更换家族去捕捉其他精灵，原家族的污染进度和计数器立即清零，重新开始累积。
异色售价	保底产出的异色精灵外观固定为“异色”（倍率 ×10），但仍可能同时出现炫彩（即有可能成为 ×100 的“异色 + 炫彩”），其天分和奖牌仍按普通规则随机生成。

表 6: 噩梦枷锁保底机制

补充简化假设：

污染精灵战斗中，若未能击破护盾（高级球或属性球未命中），保底计数不增加，也不会触发异色，但消耗的球不返还。

击破护盾后该次污染战斗即结束，不产生额外的普通捕捉收益。

为简化问题，参赛者可以假设污染精灵的出现与普通捕捉之间是即时的，不影响捕捉节奏，模型中可以将其等效为一个以约 20 只成功捕捉为周期的随机事件流。

补充说明：

以上数据除参考官方数据外还做了合理性更改与假设，以确保数据的合理性与准确性。

三、需要解决的问题

问题 1：基本情形下的单精灵捕捉策略

仅考虑基础售价，忽略所有随机倍率且关闭噩梦枷锁机制，捕捉球可无限购买，每次尝试独立。以恶魔狼为例，分别计算五种捕捉球的期望净收益（售价减球成本），据此确定最优球种并给出相应期望净收益；在此基础上，分析若连续捕捉 N 只恶魔狼，最优球种是否会随 N 变化，并说明原因。

问题 2：计入随机倍率后的期望收益

恢复天分、颜色、奖牌的随机倍率，售价按公式 (1) 计算，国王球和棱镜球的特殊效果生效，噩梦枷锁仍关闭。详细推导捕获一只恶魔狼的期望售价，重新计算五种球的期望净收益以确定该情形下的最优球种；进一步讨论长期反复捕捉恶魔狼时，为最大化平均净收益，应固定使用单一球种还是混合使用多种球种，并给出依据。

问题 3：嵌入保底机制后的家族专精策略

全面引入噩梦枷锁机制（表 6），玩家可任选家族捕捉，切换家族则原家族进度清零。任选一家族（建议恶魔狼），同时决策普通捕捉球种与污染战斗球种，建立随机过程模型或仿真，计算该家族长期平均净收益率，给出最优球种组合并解释。从全局视角定量对比“死磕一个家族累积保底”与“完全不管保底、按问题 2 最优策略随意换家族”两种方式的平均净收益。综合上述分析，设计实用的家族选择与切换策略使长期平均净收益最大，并讨论该策略在参数变化时的稳定性。

问题 4：资源与次数受限下的全局最优规划

玩家初始持有 M 洛克贝，共可进行 T 次捕捉尝试，捕捉球可随时购买，所有精灵均可捕捉且可自由选择目标形态、球种与切换家族，但切换家族会清空保底进度。要求建立全局优化数学模型（如动态规划、马尔可夫决策过程等），以 T 次尝试后的期望总资产最大化为目标，决策捕捉序列、每次球种及家族切换时机。取 $M = 16\,000\,000$ ， $T = 2000$ ，设计可行求解算法（如近似动态规划、启发式搜索、强化学习等），给出推荐捕捉方案并说明理由与主要结果。进而分析最优策略对初始资金 M 、总次数 T 以及各精灵基础数据的敏感性，指出影响最显著的参数并给出合理解释。

建模提示

问题 1、2 可围绕期望值进行静态优化，注意国王球和棱镜球的固定词条对期望售价的影响。

问题 3 适合用更新过程或马尔可夫链建模，关注污染精灵事件的触发频率和保底收益的长期平均。

问题 4 状态空间较大，推荐采用仿真优化、近似动态规划或智能算法，并注意在计算复杂度与结果精度之间取得平衡。

所有随机量的计算需明确写出假设和推导过程，对所作简化的合理性进行讨论。